



Fecha de presentación: julio, 2023  
Fecha de aceptación: octubre, 2023  
Fecha de publicación: noviembre, 2023

## ENSEÑANZA PROBLÉMICA

EN LA COMPARACIÓN DE MÉTODOS PARA ESTIMAR EL RANGO EN FACTORIZACIONES DE MATRICES

### PROBLEM TEACHING IN THE COMPARISON OF METHODS TO ESTIMATE RANKS IN MATRIX FACTORIZATIONS

Socrates Emilio Haro Guanga<sup>1</sup>

E-mail: [socrates.haro@ug.edu.ec](mailto:socrates.haro@ug.edu.ec)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8957-6350>

Francisco Xavier Vera Alcívar<sup>2</sup>

E-mail: [fvera@espol.edu.ec](mailto:fvera@espol.edu.ec)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6541-7243>

Edisson Wilfrido Lascano Mora<sup>1</sup>

E-mail: [edisson.lascanomo@ug.edu.ec](mailto:edisson.lascanomo@ug.edu.ec)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8267-6765>

Leonardo Rogelio Paladines Zurita<sup>2</sup>

E-mail: [leoropal@espol.edu.ec](mailto:leoropal@espol.edu.ec)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4514-1785>

<sup>1</sup>Universidad de Guayaquil, Ecuador.

<sup>2</sup>Escuela Superior Politécnica del Litoral, Ecuador

Cita sugerida (APA, séptima edición)

Haro Guanga, S. E., Vera Alcívar, F. X., Lascano Mora, E. W. & Paladines Zurita, L. R. (2023). Enseñanza problémica en la comparación de métodos para estimar el rango en factorizaciones de matrices. *Universidad y Sociedad*, 15(6), 615-628.

#### RESUMEN

En el ámbito científico pedagógico, la enseñanza problémica se orienta a convertir los problemas más importantes de enseñanza-aprendizaje en desafíos para los estudiantes, de modo que los estudiantes resuelvan problemas a partir de estructurar la tarea cognoscitiva como una situación conflictiva o de problema. El proceso investigativo desarrollado se orientó a partir del objetivo de determinar la validez de la enseñanza problémica en el análisis y determinación de la eficiencia de los métodos para la selección del rango en la aplicación de factorización de matrices no negativas para la identificación y eliminación de zonas de brillo, en la restauración de imágenes de colposcopia. La implementación de la enseñanza problémica permitió demostrar que el método MAD garantiza rangos promedio inferiores a 100, mientras que los otros métodos superan los 140. El análisis de la calidad de la restauración, arrojó que el método MAD alcanza un valor de SSIM 4% inferior al máximo, pero, con un valor de 78%, garantiza un equilibrio adecuado entre eficiencia computacional y calidad.

**Palabras clave:** enseñanza problémica, estudio comparativo, factorizaciones de matrices, métodos para la determinación de rangos

#### ABSTRACT

In the scientific-pedagogical field, problem-solving teaching is aimed at turning the most important teaching-learning problems into challenges for students, so that students solve problems by structuring the cognitive task as a conflictive or problem situation. The research process developed was oriented from the objective of determining the validity of problem teaching in the analysis and determination of the efficiency of methods for range selection in the application of factorization of non-negative matrices for the identification and elimination of brightness zones in the restoration of colposcopy images. The implementation of the problem teaching made it possible to demonstrate that the MAD method guarantees average ranks below 100, while the other methods exceed 140. The analysis of the quality of the restoration showed that the MAD method achieves an SSIM value 4% lower than the maximum, but, with a value of 78%, it guarantees an adequate balance between computational efficiency and quality.

**Keywords:** problem teaching, comparative study, matrix factorization, methods for determining ranges

## INTRODUCCIÓN

En los últimos años, los investigadores de las ciencias de la educación, particularmente los didactas, centran su atención en la introducción y validación de métodos de enseñanza-aprendizaje que propicien una participación cada vez más activa del estudiante en la actividad de aprendizaje. A partir de esta prioridad ha tomado fuerza una línea de investigación e innovación didáctica que ha sido denominada como enseñanza problémica (Guanche, 2021).

Específicamente, el método de exposición problémica permite desarrollar al máximo las competencias de los estudiantes. El objetivo de la educación en la actualidad no se podrá alcanzar si solo se tiene en cuenta la utilización de métodos reproductivos de enseñanza-aprendizaje. Es necesario que, junto con la apropiación de los conocimientos, los estudiantes se apropien de los métodos para obtenerlos. Este es el caso de la enseñanza problémica.

La enseñanza problémica, por su esencia, consiste en hacer que los problemas más importantes de la enseñanza-aprendizaje se conviertan también en un problema para los estudiantes. Lo fundamental de este método no es solo que los estudiantes resuelvan problemas, sino es darle a la tarea cognoscitiva una organización y estructura de situación conflictiva o de problema. Hallar la situación problémica exige por parte del docente, conocer qué conocimientos del programa se prestan para presentarlos como una situación conflictiva.

La enseñanza problémica ofrece ventajas (Azcuay et al., 2004), entre ellas están las siguientes:

- Los estudiantes pueden establecer la relación causa y efecto por lo que los conocimientos se hacen más comprensibles al conocer los estudiantes de dónde se ha extraído la verdad científica. Esto tiene un efecto educativo, por lo que este tipo de enseñanza contribuye a convertir los conocimientos en convicciones.
- Enseña a pensar dialécticamente y ofrece a los alumnos un patrón o modelo para la búsqueda científica.
- La situación conflictiva crea en el a estudiantes un estado psíquico positivo que eleva el interés por el estudio.

Mediante la actividad docente e investigativa de los autores, profundizan en diversos estudios respecto al problema de la determinación del rango óptimo en NMF. El método de la Longitud Mínima de Descripción (MDL, por sus siglas en inglés) es una técnica utilizada para la

determinación del rango, que se sustenta en la comprensión lineal de la longitud de un mensaje y busca encontrar el valor de rango que proporciona una descripción más concisa de los datos. Estudios han aplicado esta técnica en datos reales y sintéticos, demostrando su efectividad en la selección del rango en NMF (Squires, 2019). Este método se basa en el uso de la mejor codificación posible de los datos, o lo que es lo mismo, la codificación con el menor costo. Se puede estimar entonces un límite superior en las codificaciones potenciales considerando el contenido de información de cada elemento.

Por otro lado, el método del Estimador de Riesgo No Sesgado de Stein (SURE, por sus siglas en inglés) se utiliza para estimar el rango en NMF. Este método se basa en el desarrollo de un estimador computable no sesgado del error cuadrático medio (MSE) y permite obtener una estimación precisa del rango en la factorización de matrices (Lee, 2020). SURE resulta especialmente útil en situaciones en las que la distribución de los datos no es conocida o es no gaussiana. También destaca por su capacidad para manejar matrices con ruido y datos perdidos, lo que es crucial en aplicaciones del mundo real. Otra ventaja clave de SURE es su robustez frente a la elección del rango, lo que garantiza resultados confiables y estables en diferentes escenarios.

Además, el método MDA (Validación Cruzada de Imputación, por sus siglas en inglés) ha sido propuesto como una métrica para la determinación del rango en NMF. Este método se basa en la imputación de valores faltantes en los datos y utiliza la validación cruzada para evaluar el rendimiento de diferentes rangos. Los resultados obtenidos en conjuntos de datos sintéticos y reales han demostrado que el método MDA puede mejorar la precisión en comparación con otras técnicas, aunque es importante tener en cuenta las características específicas del conjunto de datos al seleccionar el método adecuado (Milligan et al., 2019).

Los métodos (MDL, SURE y MDA) ofrecen enfoques prometedoros para abordar el problema de determinación del rango en NMF, brindando opciones para seleccionar el rango óptimo y mejorar el rendimiento de la factorización de matrices no negativas en diversas aplicaciones. En correspondencia con lo anterior se ha determinado como objetivo de la presente investigación, determinar la validez de la enseñanza problémica en el análisis y determinación de la eficiencia de los métodos para la selección del rango en la aplicación de factorización de matrices no negativas para la identificación y eliminación de zonas de brillo, en la restauración de imágenes de colposcopia.

## DESARROLLO

La aplicación del método de enseñanza problémica en el proceso de enseñanza-aprendizaje, requiere tomar en consideración el principio del carácter problémico, del cual se deriva un conjunto de reglas para aplicar procedimientos de enseñanza-aprendizaje. Estos procedimientos deben organizarse teniendo en cuenta la lógica de las operaciones mentales: análisis, síntesis, deducción, deducción, generalización, así como las principales regularidades de la actividad de búsqueda de los estudiantes, como es el caso de la situación problémica, interés cognoscitivo y necesidades, entre otras.

La enseñanza problémica es aplicable en la formación de los profesionales de la medicina, un campo donde las imágenes juegan un papel fundamental en el diagnóstico de enfermedades, la planificación de procedimientos quirúrgicos y el monitoreo del progreso del tratamiento. Sin embargo, las imágenes médicas a menudo contienen componentes irrelevantes o están afectadas por brillos, distorsiones y otros elementos no deseados, que pueden dificultar la interpretación precisa.

### La enseñanza-aprendizaje de las técnicas de mejora de imágenes médicas

Existen varias técnicas ampliamente utilizadas en el campo de mejora de imágenes médicas; como el filtrado espacial, eliminación de ruido, el realce de contraste (Kaur et al., 2018); corrección de histograma (Rundo et al., 2019); deconvolución; segmentación de imágenes o la factorización de matrices (Gao et al., 2019). Esta última, se utiliza usualmente para descomponer una imagen en componentes fundamentales, como texturas, bordes y niveles de intensidad. Esto permite identificar y eliminar el ruido o los artefactos no deseados, realzar los detalles relevantes y mejorar la calidad general de la imagen.

La aplicación de la factorización de matrices no negativas (NMF, por sus siglas en inglés) es especialmente útil en el procesamiento de imágenes médicas, ya que permite resaltar estructuras y características específicas, como tumores, lesiones o vasos sanguíneos. Al identificar y resaltar estas regiones de interés, los médicos pueden obtener una visión más clara de la anatomía interna y realizar diagnósticos más precisos (Rad & Jamzad, 2017). Además, la factorización de matrices también puede utilizarse para mejorar la visualización de imágenes en tiempo real, lo que facilita la guía durante procedimientos intervencionistas y cirugías.

Uno de los campos médicos en los que se ha aplicado con éxito el método NMF, es el análisis de imágenes de colposcopia, para el desarrollo de algoritmos de

procesamiento de imágenes para la detección temprana del cáncer cérvico-uterino (Wang et al., 2021). La colposcopia es un procedimiento médico diseñado para examinar el cuello uterino, la vagina y la vulva, con el objetivo de detectar y evaluar lesiones precancerosas, infecciones, verrugas genitales o cáncer de cuello uterino (Kan et al., 2017).

En este procedimiento se utiliza un instrumento llamado colposcopio, que es similar a un microscopio con una luz y lentes de aumento, para examinar detalladamente el tejido cervical. Este instrumento tiene una serie de características y ajustes que ayudan al médico en la visualización precisa. Puede tener incorporados filtros de luz para resaltar ciertos colores o patrones y opciones de ajustes de enfoque y zoom para obtener una imagen más nítida y detallada. Estos mismos elementos generan zonas de brillo que afectan la calidad de la imagen y dificultan la interpretación del especialista. En su investigación, Gómez (2018) utilizó técnicas para eliminar el brillo en colposcopías y la NMF como método principal de restauración.

A pesar de estos resultados, el método NMF aplicado implica una dificultad que llama la atención de los investigadores, y es el relacionado con la determinación del rango. Mediante NMF, una matriz de datos se descompone en dos matrices no negativas, una matriz de componentes y una matriz de coeficientes, con el objetivo de capturar las características latentes de los datos. Sin embargo, no existe una regla fija para determinar el número óptimo de componentes, lo que puede llevar a problemas de sobreajuste o subajuste (Gilad et al., 2020 y Lin & Boutros, 2020). En consecuencia, encontrar el número correcto de rangos en NMF constituye un desafío y requiere enfoques y técnicas de selección de modelos para tomar una decisión al respecto.

### Los métodos de mejora de las imágenes médicas

Según Szeliski (2022), se pueden utilizar las siguientes matrices para el cálculo y la transformación del espacio RGB al espacio XYZ:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \frac{1}{0.17697} \begin{bmatrix} 0.49 & 0.31 & 0.20 \\ 0.17697 & 0.81240 & 0.01063 \\ 0.00 & 0.01 & 0.99 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Según Szeliski (2022), las coordenadas cromáticas se obtienen dividiendo las componentes X, Y y Z de la matriz XYZ por la suma X+Y+Z. Esto se expresa mediante las ecuaciones (2), (3) y (4). Cuando se necesita separar la luminosidad Y de la cromaticidad, se utiliza el espacio de color xyY, el cual está compuesto por la luminosidad Y y las componentes cromáticas (x,y) más relevantes.

$$x = \frac{x}{x+y+z} \quad (2)$$

$$y = \frac{y}{x+y+z} \quad (3)$$

$$z = \frac{z}{x+y+z} \quad (4)$$

En una colposcopia, se encuentran áreas con pixeles brillantes (especulares) que pueden ser lesiones, y áreas lesionadas con tejidos pálidos y menos brillantes (acetoblanco). Para mejorar la distinción entre estas áreas, se aplicó una transformación a la imagen original, mediante la ecuación (5), con el objetivo de aumentar la diferencia entre ellas.

Se aplicó el algoritmo propuesto por Meslouhi (2011) para determinar y seleccionar la región especular en una colposcopia se basa en el espacio de color xyY. El criterio utilizado consiste en seleccionar los píxeles con una mayor luminosidad (Y) en comparación con la luminosidad cromática (y). El algoritmo incluye pasos para realzar la región especular, transformar la imagen al espacio CIE-XYZ y calcular la luminosidad, el cual se expone a continuación:

$$\begin{bmatrix} R' \\ G' \\ B' \end{bmatrix} = \frac{\min(R,G,B)}{\max(R,G,B)} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} \quad (5)$$

Salida: región especular SR

SR = región especular

Realzar región especular de lmg con Ec. 1.2.5

Transformar lmg a espacio de color XYZ:

lmgXYZ = XYZ(lmg)

Para cada p en lmgXYZ hacer:

Yp = pY

$$y = \frac{pY}{pX + pY + pZ}$$

Si yp < h hacer:

SR = SR + p \* yp

Salida SR

Como método de iniciación de la NMF, se aplicó NNDSVD (*Non-negative Double Singular Value Decomposition*). Esta técnica se basa en la descomposición de valores singulares doble que considera tanto los valores singulares más grandes como los más pequeños. Al utilizar esta técnica de iniciación, se busca obtener una representación inicial más precisa de los datos y mejorar la calidad de la descomposición NMF. El método NNDSVD ha demostrado ser eficaz en diferentes aplicaciones, como la reconstrucción de imágenes y el procesamiento de señales (Díaz & Steele 2021).

Como métrica de calidad para la evaluación cuantitativa en la restauración de imágenes, se utilizó el Índice de Similitud Estructural SSIM (por sus siglas en inglés). Esta métrica es ampliamente recomendada para evaluar la calidad de imágenes, videos y otros tipos de datos visuales (Szeliski, 2022). Este índice se encuentra en el rango de 0 a 1 y evalúa características clave como la luminancia, el contraste y la estructura de la imagen. El SSIM proporciona una medida cuantitativa de similitud entre dos señales, una de las cuales se considera perfecta.

En este contexto, se supone que X e Y son dos señales de imagen no negativas que se desean comparar o evaluar. El objetivo es obtener una medida cuantitativa de la similitud de calidad entre las dos señales, teniendo en cuenta

que una de ellas se considera perfecta. Estas señales pueden representar variables continuas con un rango limitado o variables discretas, de la forma:

$X=\{x_i/i=1,2,\dots,N\}$  y  $Y=\{y_i/i=1,2,\dots,N\}$ , donde  $i$  es el índice de la muestra y  $n$  es el número de píxeles.

El índice SSIM se calculó mediante la fórmula (6).

$$\text{SSIM}(x,y) = \frac{(2\mu_x\mu_y+C_1)(2\sigma_{xy}+C_2)}{(\mu_x^2\mu_y^2+C_1)(\sigma_x^2+\sigma_y^2+C_2)} \quad (6)$$

Debe tenerse en cuenta que SSIM se define como una combinación multiplicativa de los términos, que representan a las características: luminancia ( $l$ ), contraste ( $c$ ) y estructura ( $s$ ), de la forma:

$$\text{SSIM}(x,y) = [l(x,y)]^\alpha \cdot [c(x,y)]^\beta \cdot [s(x,y)]^\gamma \quad (7)$$

Donde ; son  $\alpha>0, \beta>0$  y  $\gamma>0$ ; son

parámetros usados para ajustar la importancia relativa de las tres características. La forma específica del SSIM mostrada en (6), se obtuvo fijando:  $\alpha=\beta=\gamma=1$  y  $C_2=C_3=2$ . Luego la luminancia, el contraste y la estructura, se calculan mediante

$$l(x,y) = l(\mu_x\mu_y) = \frac{2\mu_x\mu_y+C_1}{\mu_x^2\mu_y^2+C_1} \quad (8)$$

$$c(x,y) = l(\sigma_x\sigma_y) = \frac{2\sigma_x\sigma_y+C_2}{\sigma_x^2\sigma_y^2+C_2} \quad (9)$$

$$s(x,y) = s\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}, \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) = \frac{2\sigma_{xy}+C_3}{\sigma_x\sigma_y+C_3} \quad (10)$$

las fórmulas (8), (9) y (10), respectivamente.

A continuación, se describen los métodos de determinación del rango de NMF, que serán sometidos al análisis comparativo.

## Método MAD

El método MAD, aborda el problema de selección de rango en NMF utilizando una variante de Validación Cruzada (CV) conocida como *Missing At-a-Distance*. En este enfoque, se retiene el 10% de los datos originales de manera aleatoria, sustituyéndolos por ceros. Se calcula NMF ponderado en los datos originales con estos pesos para obtener una matriz de aproximación que representa la reconstrucción de la matriz original, imputando los valores faltantes. Este proceso se repite utilizando una función objetivo y un criterio de parada, y se utiliza la desviación media absoluta (MAD, por sus siglas en inglés), como parámetro para la selección del rango (Muzzarelli et al., 2019). La matriz de pesos, llamada matriz  $P$ , asigna el valor 1 a los valores presentes y 0 a los valores retenidos o ausentes en la matriz original. La matriz

$$P = [p_{ij}], \text{ donde } p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_{ij} \text{ está presente} \\ 0 & \text{si } v_{ij} \text{ está ausente} \end{cases} \quad (11)$$

de pesos ( $P$ ) se define como se muestra en (11).

La función objetivo para el método se define para una matriz de entrada no negativa y un número natural  $k < \min(m, n)$ , se busca la matriz de imputación:

$$V_k^{m \times n} \text{ tal que } \begin{cases} \min f(V, V_k) \\ \text{s. a } V \geq 0, V_k \geq 0 \end{cases}$$

Donde:  $f(V, V_k): \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , es una distancia que se define según la fórmula (12).

$$f(V, V_k) = \frac{\sum_{t=1}^{m \times n} (V_k[muestra] - V[muestra])^2}{n_{imp}} \quad (12)$$

Donde:

$f(V, V_k)$ : Error cuadrático medio entre los datos imputados de ambas matrices

$V[muestra]$ : Contiene los elementos de la matriz original, con sus respectivas coordenadas, que fueron retirados para ser reemplazados mediante la imputación.

$V_k[muestra] = W_k H_k$  Contiene los elementos de la matriz de imputación o aproximación mediante NMF con sus respectivas coordenadas.

O sea que:  $V_k[muestra] = W_k H_k$ ; y  $k$  representa el rango buscado.

$n_{imp}$ : Número de datos imputados de la matriz original.

El algoritmo aplicado se resume a continuación, en el pseudocódigo para el cálculo de:

MAD-IMPUR Y MSE-IMPUR

Entrada:  $V$ -matriz de datos,  $m$ -número de valores faltantes,  $f$ -rango de factores de interés,  $v$ -número de iteraciones de validación cruzada.

Salida:  $MSE_{salida}$  y  $MAD_{salida}$

Inicio del primer bucle

Para todo factor de interés  $k$  en  $f$ , hacer

$mse \leftarrow$  Vector de longitud

Inicio del segundo bucle

Para cada  $v$  iteración, hacer

$im \leftarrow$  Seleccionar aleatoriamente  $m$  índices de  $m$  elementos

$V_m \leftarrow V$

$V_m[im] \leftarrow NAN$

$W, H \leftarrow NMF(V_m, k)$

$V_r \leftarrow W * H$

$mse[i] \leftarrow$  media( $\text{suma}(V_r[im] - V[im])^2$ )

Fin del primer bucle

$MSE_{imput}^k \leftarrow$  median( $mse$ )

$MAD_{imput}^k \leftarrow$  mad( $mse$ )

Fin del segundo bucle

$MSE_{imput} \leftarrow$  min( $MSE_{imput}^k$ )

$MAD_{imput} \leftarrow$  min( $MAD_{imput}^k$ )

### Método MDL

La Longitud Mínima de Descripción (MDL, por sus siglas en inglés), es un método basado en la teoría de telecomunicaciones para seleccionar el rango óptimo en modelos de complejidad variable. El objetivo es comprimir los datos de manera eficiente para enviar la máxima información con la menor longitud posible. En este contexto, se utiliza la factorización matricial no negativa (NMF) para aproximar una matriz de datos no negativos  $V$  mediante la multiplicación de las matrices  $W$  y  $H$ . El parámetro de precisión  $k$  determina el nivel de compresión de los datos. El principio de MDL busca minimizar la longitud total del mensaje al encontrar un equilibrio entre la complejidad y la precisión del modelo, eliminando características redundantes y resaltando las características relevantes (Squires, 2019).

En el contexto de este trabajo, se utiliza una matriz de datos no negativos  $V^{m \times n} \in \mathbb{Z}_+^{m \times n}$  , como el mensaje original. Para comprimir el mensaje, se utiliza la factorización matricial no negativa (NMF) mediante la multiplicación de dos matrices no negativas  $W$  y  $H$ ,  $W^{m \times k} \geq 0; H^{k \times n} \geq 0$  , aproximando así el mensaje como  $V \approx WH$ . La precisión del mensaje está determinada por el parámetro de rango  $k$ , que representa el nivel de compresión de los datos en la factorización NMF. Cuando  $k$  es pequeño, lo cual implica que  $W$  y  $H$  contienen pocos elementos baratos de codificar, la aproximación  $WH$  de  $V$  es deficiente y requiere una adición al mensaje para corregir la mala aproximación. El principio de Longitud Mínima de Descripción (MDL) consiste en seleccionar un modelo que minimice la longitud total del mensaje, logrando un equilibrio entre la complejidad y la precisión. Esto permite minimizar la transmisión de características redundantes o menos importantes (ruido) y maximizar la transmisión de las características relevantes del mensaje original.

Se proponen dos métodos para aplicar la Longitud Mínima de Descripción (MDL) a la factorización matricial no negativa (Squires, 2019). El primer método utiliza el histograma y la probabilidad clásica de Laplace, mientras que el segundo se basa en la distribución de probabilidad Gamma. Los datos se dividen en dos grupos (ceros y no ceros) para ajustar los métodos adecuadamente. Esta separación se justifica debido a la naturaleza escasa de las matrices generadas por NMF y la necesidad de tratar los ceros, de manera precisa. Los resultados demuestran mejoras en la precisión y eficiencia del modelo. Las matrices se separan como se muestra en (13).

$$W \rightarrow \begin{cases} W_0, w_{ij} < corte \\ W_m, w_{ij} \geq corte \end{cases}; H \rightarrow \begin{cases} H_0, h_{ij} < corte \\ H_m, h_{ij} \geq corte \end{cases} \quad (13)$$

Para los valores inferiores al umbral de corte, se aplica el método del histograma para el cálculo de la longitud (costo), mediante las funciones (14) y (15):

$$LW_0 = -nW_0 \log_2 \left( \frac{nW_0}{ntW} \right) - (ntW - nW_0) \log_2 \left( \frac{ntW - nW_0}{ntW} \right) \quad (14)$$

$$LH_0 = -nH_0 \log_2 \left( \frac{nH_0}{ntH} \right) - (ntH - nH_0) \log_2 \left( \frac{ntH - nH_0}{ntH} \right) \quad (15)$$

Para los valores superiores al umbral de corte, se aplica el método de la distribución Gamma, para el cálculo de la longitud (costo), mediante la función (16).

$$L(W_m, H_m) = \sum_i \sum_j \log_2 P(W_{m_{ij}}) + \sum_i \sum_j \log_2 P(H_{m_{ij}}) + \sum_i \sum_j \log_2 P(E_{ij}) \quad (16)$$

Donde:

$P(W_{m_{ij}})$ : Probabilidad de la distribución Gamma ajustada a la matriz  $W_m$

$P(H_{m_{ij}})$ : Probabilidad de la distribución Gamma ajustada a la matriz  $H_m$

$P(E_{ij})$ : Probabilidad ajustada de la matriz de errores  $E=V-WH$ , ajustada a una distribución normal con  $\mu=0; \sigma^2$

La función objetivo para el método se define igualmente para una matriz de entrada no negativa  $V \in R_+^{m \times n}$  y un  $n$  mero natural  $k < \min(m, n)$ , y se busca :  $W \in R_+^{m \times k}$  y  $H \in R_+^{k \times n}$ , tal que :

$$V \approx WH \begin{cases} \min L(V, WH) \\ \text{s. a } W \geq 0, H \geq 0 \end{cases} \quad (17)$$

Donde:  $L(V, WH): \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , es una distancia que se define integrando (14), (15) y (16), para obtener:

$$\begin{aligned} (V, WH) = & -nW_0 \log_2 \left( \frac{nW_0}{ntW} \right) - (ntW - nW_0) \log_2 \left( \frac{ntW - nW_0}{ntW} \right) + \\ & \sum_i \sum_j \log_2 P(Wm_{ij}) - nH_0 \log_2 \left( \frac{nH_0}{ntH} \right) - (ntH - \\ & nH_0) \log_2 \left( \frac{ntH - nH_0}{ntH} \right) + \sum_i \sum_j \log_2 P(Hm_{ij}) + \sum_i \sum_j \log_2 P(E_{ij}) \end{aligned} \quad (18)$$

El algoritmo del método original para cada valor de k de umbral automático cero, se resume en el siguiente pseudo-código:

*Entrada:*  $V, W, H, \partial D$

*Salida:* Descripción de la longitud para cada k

*Inicio del ciclo "for" para valores de umbral 0 de W y H*

*Separar los valores 0, calcular  $L(W_0)$  y  $L(H_0)$*

*Aplicar la distribución Gamma a  $W_+, H_+$  y calcular  $L(W_+)$  y  $L(H_+)$*

*Calcular E, y luego  $L(E)$*

*Calcular  $L(D.H)$*

*Inicio "if"  $L(D.H)$  menor que el anterior, almacena la longitud "end if"*

*Cierre del ciclo "for"*

*Devuelve  $L(D.H)$*

### Método SURE

El error cuadrático medio (ECM) es una medida comúnmente utilizada para evaluar la precisión de un estimador o un modelo en comparación con los valores reales. Se calcula como la media de los errores al cuadrado entre las predicciones y los valores observados.

El método SURE, se basa en obtener un estimador insesgado para el ECM, en la determinación del rango en NMF. Se pretende que las predicciones no estén sistemáticamente sesgadas hacia arriba o hacia abajo en relación con los valores reales. Un estimador insesgado proporciona predicciones imparciales y, por lo tanto, permite una evaluación más acertada de la precisión del modelo.

Según este método, se plantea el problema de los rangos a partir del modelo:

$$V_{m \times n} = W_{m \times k} H_{k \times n} + \varepsilon_{m \times n}, \text{ para } V \geq 0, W \geq 0, H \geq 0; v_{ij} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ij}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \quad (19)$$

En el método SURE, se interpreta que el error cuadrático medio

para  $\mu_{ij} = \mu_{ij,k}(V)$ , es un estimador de  $\mu_{ij} = [WH]_{ij}$ , donde k es el rango del NMF

Para calcular el rango se aplica (Ulfarsson & Solo, 2013, citados por Nguyen et al., 2020):

$$R_k = \sum_{ij} E \left[ (\mu_{ij} - \mu_{ij,k})^2 \right] = \sum_{ij} (e_{ij})^2 - 2 \sum_{ij} E[e_{ij} \varepsilon_{ij}] + nm\sigma^2 \quad (20)$$

La función objetivo del método es:

Dada una matriz de entrada no negativa y un número real  $k < \min(m, n)$ . Se busca el estimador  $R_k \in \mathbb{R}_+$ , tal que:

$$\begin{cases} \min f(V, R_k) \\ \text{s. a } V \geq 0, R_k \geq 0 \end{cases} \quad (21)$$

Donde,  $f(V, R_k): \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , es una distancia que se define

$$R_k = \sum_{ij} (e_{ij})^2 + 2\sigma^2(m+n)k - 2\sigma^2 \left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n-k} \frac{2(\lambda_j)^2}{(\lambda_j)^2 - (\rho_i)^2} \right) \quad (22)$$

El algoritmo aplicado se resume a continuación en el pseudocódigo

**Entrada:**  $V$ , rangos  $k$

$W_0, H_0$ : Inicializar NMF ( $V, k$ )

Calcular los valores propios al cuadrado:  $(\rho_i)^2$  de  $K^T K W^T W$

Calcular los valores propios al cuadrado:  $(\lambda_j)^2$  de  $E^T E$

Calcular  $\sigma = \frac{\frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \text{mediana}(|E_{ij}|)}{0.6745}$

Calcular el estimador  $R_k$

Salida:  $\min R_k$

Se realizaron 61200 simulaciones en Matlab, para estudiar el rango utilizando los tres métodos, aplicados a 12 colposcopías. Se fijó un intervalo de rangos entre 50 y 200, considerando que el rango completo de una colposcopia es de aproximadamente 486 unidades lineales. En cada simulación, se seleccionó el rango mínimo entre SURE, MDL y MAD.

Principales resultados en la validación de los métodos para la selección del rango en la aplicación de factorización de matrices no negativas

Se llevaron a cabo múltiples ejecuciones de los programas de MDL, SURE y MAD utilizando los tres softwares implementados de manera correcta. Durante estas ejecuciones, se variaron los valores óptimos de la Función Objetivo (FO) de NMF, mientras se mantuvo constante el umbral de parada en 1000 iteraciones. Además, se realizaron ajustes en ciertos parámetros específicos de cada método, sin alterar su estructura y modelo de convergencia. Estas variaciones permitieron explorar diferentes configuraciones y evaluar el rendimiento de los métodos.

En la tabla 1 se muestran los resultados de los rangos mínimos para los diferentes ajustes de los parámetros al método MDL.

Tabla 1. Estudio del rango con el método MDL

colposcopia	Partición	FO NMF	Rango	iteraciones	Tiempo (min)
colpos1	corte=0.02	0.050	200	6892	3.10
colpos1	corte=0.01	0.075	200	902	2.18
colpos1	corte=0.02	0.075	200	902	2.31
colpos1	corte=0.005	0.080	200	596	2.20
colpos1	corte=0.02	0.080	200	596	3.75

Fuente: Elaboración propia.

Después de realizar diversas pruebas experimentales, se observó que el valor del rango se mantuvo constante en 200, independientemente de las variaciones en los parámetros. Se realizaron pruebas utilizando diferentes valores óptimos de la Función Objetivo (FO) de NMF (0.05, 0.075 y 0.08) y diferentes umbrales de corte de MDL (0.01, 0.02, 0.005). Aunque el número de iteraciones y el tiempo de ejecución fueron relativamente bajos, el valor del rango no disminuyó.

En el caso del método SURE, se muestran en la tabla 2 los resultados de la respuesta del rango a las variaciones en los parámetros.

Tabla 2. Estudio del rango con el método SURE

colposcopia	FO NMF	Rango	iteraciones	t min
colpos1	0.050	175	6894	3.27
colpos1	0.075	153	903	2.31
colpos1	0.080	123	597	2.24
colpos2	0.050	114	3685	2.51
colpos2_2 <sup>a</sup>	0.050	114	3685	3.89
colpos2	0.075	104	884	5.29
colpos2_2 <sup>a</sup>	0.075	104	884	2.39
colpos2	0.080	168	668	2.08

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados de la tabla muestran el impacto de diferentes valores de la Función Objetivo (FO) de NMF en el rango, el número de iteraciones y el tiempo de ejecución en diferentes colposcopias.

En la colposcopia "colpos1", se observa que a medida que el valor de FO del NMF aumenta de 0.050 a 0.080, el rango disminuye de 175 a 123. Esto indica que un valor de FO más alto está generando una aproximación más compacta y reducida de los datos. En la colposcopia "colpos2", también se observa una tendencia similar. A medida que el valor de FO aumenta, el rango disminuye de 114 a 168. Esto sugiere que un valor de FO NMF más alto está produciendo una aproximación más precisa y de menor dimensión.

En términos de iteraciones y tiempo de ejecución, no se observa una relación clara con el valor de FO NMF. Sin embargo, en general, se puede apreciar que el tiempo de ejecución tiende a ser más largo en la colposcopia "colpos2\_2<sup>a</sup>" en comparación con "colpos2". Esto puede deberse a variaciones en los datos o en la implementación del algoritmo. En resumen, los resultados de la tabla indican que el valor de FO tiene un impacto en el rango y puede influir en la precisión y compresión de los datos. Sin embargo, se requiere un análisis más detallado y considerar otros factores para comprender completamente el comportamiento del algoritmo NMF en estas colposcopias específicas.

Al aplicar el método MAD, se ha observado que, valores inferiores a 0.08 en la Función Objetivo (FO) de NMF, resultan en una convergencia muy lenta y un alto costo computacional. Por lo tanto, en lugar de variar la FO de NMF, se decidió explorar la variación en el número de repeticiones y el porcentaje de retención en MAD para reducir el costo computacional sin comprometer el rango obtenido, como se muestra en la tabla 3.

Tabla 3. Estudio del rango con el método MAD con 0.08 FO

porcentaje de retención	repeticiones=75	repeticiones=100	repeticiones=125
5%	156	138	164
10%	186	149	108
15%	142	163	166
20%	50	192	164

Fuente: Elaboración propia.

Se puede apreciar que el valor mínimo de rango obtenido es 50, el cual se logra con un porcentaje de retención del 20% y 75 repeticiones. En comparación, el modelo original utiliza un porcentaje de retención del 10% y 100 repeticiones. Es importante destacar que el porcentaje de retención es relativo y depende de la cantidad de píxeles brillantes en la colposcopia, mientras que el número de repeticiones afecta directamente el costo computacional y el tiempo de ejecución de MAD.

Sin embargo, el valor mínimo de rango de 50 obtenido no es concluyente debido a la naturaleza probabilística de la retención de datos. Al realizar nuevas ejecuciones, es posible obtener resultados diferentes, tanto mayores como

menores. Lo que se puede inferir de esta tabla es que, en general, los valores de rango obtenidos están por debajo del máximo establecido de 200.

Para comparar los rangos de los tres métodos, se decidió fijar un valor óptimo de NMF en 0.08 y se estableció un umbral de 1000 iteraciones para encontrar el valor del rango mínimo de 58. Sin embargo, para el ciclo de obtención de las matrices NMF utilizadas en la restauración o en el producto WH, se utilizó un valor óptimo de NMF de 0.02 y un umbral de 1000 iteraciones.

Tabla 4. Comparación de rangos mínimos para los tres métodos con parámetros estandarizados

50 <math>k</math> <math>< 200</math>	SURE	MDL	MAD
colpos1	123	200	104
colpos2	168	200	79
colpos3	190	200	100
colpos4	113	200	62
colpos5	168	200	149
colpos6	125	200	137
colpos7	147	200	184
colpos8	131	200	64
colpos9	94	200	104
colpos10	176	200	76
colpos11	184	200	84
colpos12	125	200	56
Rango promedio	145	200	100

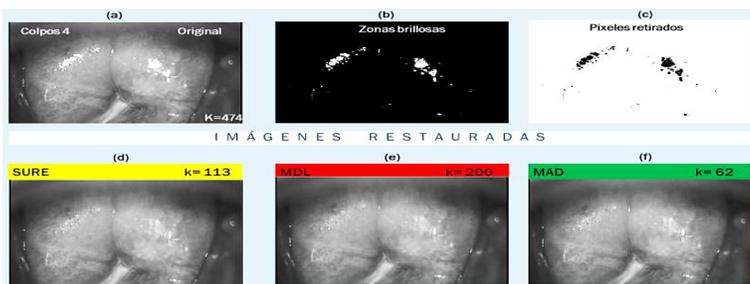
Fuente: Elaboración propia.

Los resultados obtenidos muestran diferencias significativas entre los tres métodos estudiados. El método MDL tiene un rango mínimo promedio de 200, mientras que el método SURE tiene un rango mínimo promedio de 145. Por otro lado, el método MAD muestra el rango mínimo promedio más bajo, con un valor de 100. Esta diferencia de 100 puntos con respecto a MDL y 45 puntos con respecto a SURE es considerable.

Estas diferencias en los rangos mínimos pueden deberse a las diferentes estrategias y criterios utilizados por cada método para realizar la aproximación y compresión de los datos. Cada método tiene sus propias herramientas matemáticas para estimar la precisión y la relevancia de los componentes en la aproximación.

En la figura 1 se pueden apreciar los resultados de la eliminación del brillo por los tres métodos, para una de las colposcopías estudiadas y el número de rangos requeridos por cada método para la reconstrucción de la imagen.

Figura 1. Diferencias de rangos de los tres métodos en la restauración de imagen 4

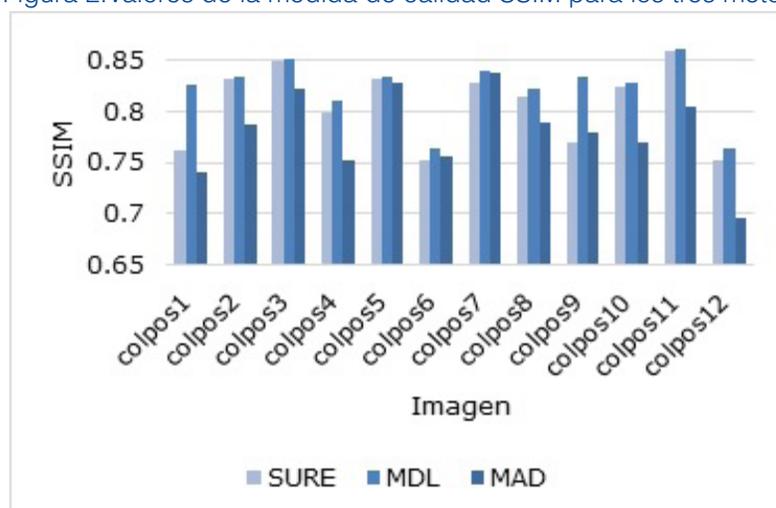


Fuente: Elaboración propia.

Las doce colposcopías se representan en matrices de 474x718 en escala de grises, con un rango completo de 474 en todos los casos. En la Figura 1, se muestra la colposcopia 4 en escala de grises, la delimitación de las zonas brillosas, la retención de los píxeles brillosos y la restauración utilizando los rangos mínimos proporcionados por SURE (113), MDL (200) y MAD (62). A simple vista, es difícil detectar las diferencias entre las imágenes restauradas. Sin embargo, se observa una gran reducción del rango con el método MAD, de 474 a 62, mientras que los otros métodos también reducen el rango, pero en menor medida. Estas diferencias cuantitativas revelan el impacto del método MAD en la reducción del rango de las colposcopías.

Al aplicar la medida de calidad SSIM para comparar V con el producto WH, se puede tener una medida cuantitativa que permita comparar a los tres métodos, en cuanto a su efectividad en la restauración de colposcopías a partir de la identificación y eliminación de zonas de brillo. En la figura 2 se muestran los resultados al comparar la calidad de cada método en la restauración de las 12 imágenes.

Figura 2. Valores de la medida de calidad SSIM para los tres métodos



Fuente: Elaboración propia.

El método MDL mostró el valor promedio de rangos más alto, logró superar al resto de los métodos según el cálculo del SSIM, para el 100% de las imágenes restauradas. Al revisar los valores promedio se pudo constatar que los valores no difieren significativamente entre los dos primeros 0.80 y 0.82 (para SURE, MDL respectivamente). Sin embargo, el MAD se aleja en 4 puntos porcentuales respecto al MDL, debido a que utiliza, como promedio, la mitad de rangos que MDL.

Respecto a este resultado, es importante señalar que el número de rangos NMF utilizado tiene un impacto significativo en la calidad de la restauración de una imagen. En general, a medida que aumenta el número de rangos NMF, se obtiene una mayor capacidad de representación y detalle en la imagen restaurada. Esto se debe a que más rangos permiten capturar variaciones más finas en los datos originales.

Sin embargo, es importante encontrar un equilibrio, ya que utilizar un número excesivo de rangos puede conducir a sobre ajustar la imagen y capturar ruido o artefactos innecesarios. Por otro lado, utilizar un número insuficiente de rangos puede llevar a una pérdida de detalles y una imagen restaurada de baja calidad.

Por lo tanto, es crucial realizar experimentos y análisis para determinar el número óptimo de rangos NMF que brinde una restauración de imagen de alta calidad. Esto implica considerar las características de la imagen, la naturaleza del problema y evaluar visualmente y cuantitativamente la calidad de la imagen restaurada utilizando diferentes configuraciones de rangos NMF.

## CONCLUSIONES

La enseñanza problémica consiste en hacer que los problemas más importantes de la enseñanza-aprendizaje se conviertan también en un problema para los estudiantes, de modo que los estudiantes resuelvan problemas a partir de estructurar la tarea cognoscitiva en una organización de situación conflictiva o de problema.

Se desarrolló un proceso investigativo con el objetivo de determinar la validez de la enseñanza problémica en el análisis y determinación de la eficiencia de los métodos para la selección del rango en la aplicación de factorización de matrices no negativas para la identificación y eliminación de zonas de brillo, en la restauración de imágenes de colposcopia.

Los resultados obtenidos de las pruebas experimentales muestran que el valor del rango se mantuvo constante en 200 para el método MDL, independientemente de las variaciones en los parámetros. Por otro lado, el método SURE mostró una disminución en el rango a medida que aumentaba el valor de la Función Objetivo (FO) de NMF. Por último, el método MAD demostró una gran reducción en el rango, llegando a valores mínimos de 62, utilizando menos rangos en comparación con los otros métodos.

La implementación de la enseñanza problémica permitió demostrar que el método MDL mostró el valor promedio de rangos más alto y superó al resto de los métodos en términos de calidad según el cálculo del SSIM. Sin embargo, el método MAD logró una reducción significativa en el rango utilizando la mitad de rangos en comparación con el método MDL, lo que sugiere un equilibrio entre calidad y eficiencia computacional.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Azcuy Lorenz, L. M., Nápoles Crespo, E., Infantes Quiles, L., Rivero Rivero, M., & Ramírez Varona, R. (2004). Algunas consideraciones teóricas acerca de la *Enseñanza Problemática*. *Humanidades Médicas*, 4(1), 0-0.
- Díaz, A., & Steele, D. (2021). Analysis of the robustness of NMF algorithms. arXiv preprint arXiv:2106.02213.
- Gao, M., Chen, H., Zheng, S., & Fang, B. (2019). Feature fusion and non-negative matrix factorization based active contours for texture segmentation. *Signal Processing*, 159, 104-118.
- Gilad, G., Sason, I., & Sharan, R. (2020). An automated approach for determining the number of components in non-negative matrix factorization with application to mutational signature learning. *Machine Learning: Science and Technology*, 2(1), 015013.
- Gómez, D. (2018). Eliminación de zonas especulares en imágenes de colposcopia utilizando Factorizaciones Matriciales No-negativas [Tesis de Diploma]. Universidad de La Habana.
- Guanche Martínez, A. S. (2021). Algunos aportes de los pedagogos cubanos a la teoría de la enseñanza problémica. *Anales de la Academia de Ciencias de Cuba*, 11(2).
- Kaur, R., Chawla, M., Khiva, N. K., & Ansari, M. D. (2018). Comparative analysis of contrast enhancement techniques for medical images. *Pertanika J Sci Technol*, 26(3), 965-78.
- Khan, M. J., Werner, C. L., Darragh, T. M., Guido, R. S., Mathews, C., Moscicki, A. B., ... & Huh, W. K. (2017). ASCCP colposcopy standards: role of colposcopy, benefits, potential harms, and terminology for colposcopic practice. *Journal of lower genital tract disease*, 21(4), 223-229.
- Lee, S. (2020). Estimating the rank of a nonnegative matrix factorization model for automatic music transcription based on stein's unbiased risk estimator. *Applied Sciences*, 10(8), 2911.
- Lin, X., & Boutros, P. C. (2020). Optimization and expansion of non-negative matrix factorization. *BMC bioinformatics*, 21(1), 1-10.
- Milligan, K., Deng, X., Shreeves, P., Ali-Adeeb, R., Matthews, Q., Brolo, A., ... & Jirasek, A. (2021). Raman spectroscopy and group and basis-restricted non negative matrix factorisation identifies radiation induced metabolic changes in human cancer cells. *Scientific reports*, 11(1), 3853.
- Muzzarelli, L., Weis, S., Eickhoff, S. B., & Patil, K. R. (2019, July). Rank Selection in Non-negative Matrix Factorization: systematic comparison and a new MAD metric. In *2019 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)* (pp. 1-8). IEEE.
- Nguyen, H. V., Ulfarsson, M. O., & Sveinsson, J. R. (2020). Hyperspectral image denoising using SURE-based unsupervised convolutional neural networks. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 59(4), 3369-3382.
- Rad, R., & Jamzad, M. (2017). Image annotation using multi-view non-negative matrix factorization with different number of basis vectors. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 46, 1-12.
- Rundo, L., Tangherloni, A., Nobile, M. S., Militello, C., Besozzi, D., Mauri, G., & Cazzaniga, P. (2019). MedGA: a novel evolutionary method for image enhancement in medical imaging systems. *Expert Systems with Applications*, 119, 387-399.
- Squires, S. E. (2019). Non-negative matrix factorisation: Algorithms and applications (Doctoral dissertation, University of Southampton). University of Southampton Institutional Repository.

- Szeliski, R. (2022). Computer vision: algorithms and applications. *Springer Nature*. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-34372-9>
- Wang, Y., Chen, Y., Lu, J., Li, S., & Wu, D. (2021). Fine-Grained Classification of Colposcopic Images with Multi-Modality. *In 2021 8th International Conference on Biomedical and Bioinformatics Engineering* (pp. 30-36).