58

Fecha de presentación: diciembre, 2020
Fecha de aceptación: febrero, 2021
Fecha de publicación: marzo, 2021

GEOGEBRA

COMO MEDIO PARA IDENTIFICAR PATRONES EN LA CLASE DE ÁLGEBRA LINEAL: UNA PROPUESTA CONCRETA

GEOGEBRA AS A MEANS TO IDENTIFY PATTERNS IN LINEAR ALGEBRA CLASS: A CONCRETE PROPOSAL

Marcos Campos Nava[1]
E-mail: mcampos@uaeh.edu.mx
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7534-3193
Agustín Torres Rodríguez[2]
E-mail: aatr68@hotmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9112-3070
Luisa Morales Maure[3]
E-mail: luisa.morales@up.ac.pa
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3905-9002
[1] Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.
[2] Instituto Tecnológico de Atitalaquia. México.
[3] Universidad de Panamá. Sistema Nacional de Investigación. Panamá.

Cita sugerida (APA, séptima edición)

Campos Nava, M., Torres Rodríguez, A., & Morales Maure, L. (2021). GeoGebra como medio para identificar patrones en la clase de Álgebra Lineal: una propuesta concreta. *Revista Universidad y Sociedad*, 13(2), 528-537.

RESUMEN

El uso de herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas es recomendable, según lo señalan diversas investigaciones. Se ha identificado que la forma de pensar y resolver problemas es diferente cuando éstos se abordan con el uso de recursos digitales. En el caso particular del álgebra lineal, disciplina que se imparte en los primeros semestres en carreras de ingeniería en México, se fomenta que los estudiantes conozcan métodos, técnicas y algoritmos relacionados con el tópico de matrices y de forma sistemática se les pide desarrollen habilidades para resolverlos. Aunque resulta necesario el aprendizaje de dichas habilidades, no debiera ser el objetivo central de su enseñanza. Diversos autores identifican que uno de los objetivos centrales de cualquier curso de matemáticas, debiera ser que los estudiantes identifiquen patrones y puedan realizar justificaciones o generalizaciones asociadas a dichos patrones. En esta propuesta, se sugiere emplear un sistema de geometría dinámico como GeoGebra, para que el profesor genere recursos digitales, tales como plantillas dinámicas con los que el estudiante pueda interactuar en forma virtual, y que le permitan identificar patrones, concretamente en el tópico de matrices, identificando arreglos numéricos que generan matrices con determinante nulo, un caso para desarrollar en álgebra lineal.

Palabras clave: Herramientas digitales, geometría dinámica, GeoGebra, álgebra lineal.

ABSTRACT

The use of digital tools in the teaching of mathematics is recommended, according to various investigations. It has been identified that the way of thinking and solving problems is different when they are approached with the use of digital resources. In the particular case of linear algebra, a discipline taught in the first semesters of engineering careers in Mexico, students are encouraged to know methods, techniques and algorithms related to the topic of matrices and are systematically asked to develop skills to solve them. Although the learning of these skills is necessary, it should not be the central objective of their teaching. Various authors identify that one of the central objectives of any mathematics course should be for students to identify patterns and be able to make justifications or generalizations associated with said patterns. In this proposal, it is suggested to use a dynamic geometry system such as GeoGebra, so that the teacher generates digital resources, such as dynamic templates with which the student can interact virtually, and that allow them to identify patterns, specifically in the topic of matrices, identifying numerical arrangements that generate matrices with null determinant, a case to develop in linear algebra.

Keywords: Digital tools, dynamic geometry, GeoGebra, linear algebra.

INTRODUCCIÓN

Una pregunta que frecuentemente debieran hacerse los profesores de matemáticas es ¿qué deben aprender mis estudiantes? Claro está que, por la naturaleza de esta pregunta, no hay respuesta única ni trivial, dependería en todo caso, de varios factores, entre ellos, lo que el profesor considera ¿qué son las matemáticas? (Campos-Nava & Torres-Rodríguez, 2019).

Al respecto, existe consenso entre diversos especialistas de que las matemáticas son la ciencia de los patrones (Steen, 1988; Devlin, 1994; Olivieri, 1997; Steen, 1998), en consecuencia, los profesores de matemáticas debieran orientar parte de su trabajo en promover que los estudiantes sean capaces de identificar patrones relacionados a los tópicos bajo estudio, para posteriormente tratar de formular justificaciones sobre los mismos. Esta forma de concebir la instrucción en las clases de matemáticas es compatible con algunos elementos de la naturaleza de la disciplina, es decir, la formulación de conjeturas y análogamente la justificación de tales conjeturas, que, en palabras de Schoenfeld (1992), es parte del quehacer de los matemáticos profesionales.

Estos y otros elementos han sido identificados como fundamentales en el desarrollo del *pensamiento matemático* de los estudiantes, (Schoenfeld, 1992), ya que está implícito en la naturaleza de las matemáticas la resolución de problemas, en la cual, plantear conjeturas por medio de la identificación de patrones y justificar dichas conjeturas, permite a los estudiantes *darles sentido a las matemáticas.*

Por otro lado, el uso sistemático de recursos digitales se ha extendido desde hace algunas décadas en el sector educativo, y las matemáticas no han sido la excepción, desde recursos didácticos como videotutoriales, MOOCs, video-documentales, plataformas digitales, hasta el uso de software especializado en matemáticas, forman parte del contexto de los estudiantes y les resultan familiares.

"Las redes sociales, los escenarios virtuales y los materiales audiovisuales han modificado la forma de comunicarnos desde hace más de dos décadas; esto ha repercutido en la manera como los seres humanos podemos aprender debido a la gran cantidad de recursos que ofrecen información de diversas formas: videos tutoriales, blogs, documentales, libros y artículos en formato electrónico, entre otros". (Campos-Nava & Torres-Rodríguez, 2017, p. 148)

En este sentido, es pertinente que los profesores de matemáticas sean conscientes de lo importante que resulta incorporar algunas herramientas y recursos digitales en su práctica docente, ya que el uso sistemático de éstos puede favorecer la identificación de patrones y en consecuencia el planteamiento de conjeturas en diversas asignaturas del currículum escolar.

Se mencionó anteriormente que, es deseable enfocar parte de las clases de matemáticas a la identificación de patrones, el planteamiento de conjeturas y su posible justificación/generalización, ya que esta actividad es consistente con el pensar matemáticamente. Autores como Sáenz (2001); y Álvarez, et al. (2014), han desarrollado ideas al respecto de lo necesario que es, fomentar y desarrollar este tipo de actividades con los estudiantes.

Al respecto Mason, et al. (2013), definen una conjetura como *"una afirmación que parezca razonable, pero cuya veracidad no se ha demostrado; es decir, aún no ha sido justificada convincentemente y no se sabe de algún ejemplo que la contradiga, ni se sabe que haya tenido consecuencias que sean falsas".* (p. 89)

Cuando el estudiante es capaz de identificar un patrón, se espera que pueda plantear una conjetura, tras el planteamiento de esta, el esfuerzo debiera enfocarse en tratar de generalizar dicho patrón, en otras palabras, tratar de justificar o argumentar si la conjetura es válida para todos los casos.

"Tratar de darle sentido a algún patrón subyacente se le conoce como generalizar. Significa advertir ciertas características comunes de varios ejemplos particulares e ignorar otras. Una vez estructurada, la generalización deviene en conjetura, la cual debe investigarse para ver si es precisa o correcta. Todo este proceso es la esencia del razonamiento matemático". (Mason et al, 2013, p. 45)

Existen numerosos ejemplos en ramas de las matemáticas como la aritmética o la geometría sobre reconocimiento de patrones, pueden ser sucesiones numéricas, secuencias figurales, números poligonales, etcétera, sin embargo, no es común encontrar propuestas de actividades pare el reconocimiento de patrones en el álgebra lineal.

Si bien los antecedentes del álgebra lineal son antiguos, su desarrollo como rama de las matemáticas ocurrió hasta el siglo XIX, y su incorporación en el currículum escolar, es más reciente que en el caso de otras ramas de las matemáticas como la geometría sintética o el cálculo infinitesimal. Mosquera (2019), menciona que, en el caso de Venezuela, se tiene registros de que lo primeros cursos de álgebra lineal se empezaron a impartir en ese país en el año 1918. En este orden de ideas, los orígenes del álgebra lineal son ubicados por algunos historiadores en papiros egipcios que datan de varios siglos anteriores a nuestra era, en los que se presentan problemas algebraicos que conducen a sistemas de ecuaciones lineales.

Por otro lado, la génesis de los números complejos en el siglo XVI es otro antecedente importante de la disciplina; sin embargo, el concepto de matriz que es probablemente el objeto de estudio central del álgebra lineal, fue definido formalmente hasta mediados del siglo XIX con los trabajos de Sylvester y Cailey (Luzardo & Peña, 2006; Rosales, 2009).

Aunado a lo anterior, aunque el concepto de determinante está íntimamente ligado al de matriz, los orígenes de la noción de determinante se remontan a mediados del siglo XVI con Girolamo Cardano en Europa, mientras que en Japón, Seki Kowa publicó en 1683 el que puede considerarse el primer tratado formal sobre el tema, mientras que otros historiadores incluso remontan su concepción a culturas ancestrales, como la China del siglo II antes de nuestra era (Luzardo & Peña, 2006; Rosales, 2009; Medel & García, 2016).

Haciendo a un lado definiciones formales, se puede considerar que una matriz es un arreglo rectangular cuyas entradas comúnmente son números, pero no necesariamente, en el caso particular de que este arreglo de números, (que también pudiera concebirse como una ***tabla)*** tenga el mismo número de renglones que de columnas, estamos en presencia de una matriz cuadrada. En el caso particular de que la matriz sea cuadrada, tiene asociada ***una constante*** a la que llamamos su determinante .

Sin que sean lo mismo, se puede hacer una analogía entre el determinante de una matriz y las ***constantes mágicas*** de los llamados ***cuadrados mágicos,*** es decir, los conocidos arreglos cuadrados de números enteros, que, al sumarse en cualquier dirección, el resultado es ***invariante***.

Figura 1. Melancolía de Alberto Durero en el que aparece un cuadro mágico.

En la Figura 1, se puede apreciar en la parte superior derecha del grabado un ejemplo de cuadro mágico de orden 4, en términos matriciales, es una matriz de 4x4 o de orden cuatro.

Tabla 1. Cuadro mágico de Alberto Durero.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

En la tabla 1, se presenta un detalle del cuadro mágico del grabado en la Figura 1, se considera cuadro mágico porque al sumar los 4 números que aparecen en cada renglón, en cada columna e incluso en cada diagonal, el resultado es 34, la llamada constante mágica.

Si bien el determinante de una matriz no se obtiene con sólo sumar los elementos de cada renglón o cada columna, resulta ser, que al igual que la constante mágica de un cuadro mágico, es un invariante para cada matriz cuadrada (sin que tenga que ser un cuadro mágico). Con alguno de los conocidos métodos para calcular determinantes, se puede hallar el determinante de la matriz, de la Tabla 1, empleando el método denominado expansión de Laplace para el primer reglón, se establece (F1):

$$\Delta = 16\begin{vmatrix} 10 & 11 & 8 \\ 6 & 7 & 12 \\ 15 & 14 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 11 & 8 \\ 9 & 7 & 12 \\ 4 & 14 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & 10 & 8 \\ 9 & 6 & 12 \\ 4 & 15 & 1 \end{vmatrix} - 13\begin{vmatrix} 5 & 10 & 11 \\ 9 & 6 & 7 \\ 4 & 15 & 14 \end{vmatrix} \quad \text{(F1)}$$

Siendo un determinante de orden cuatro, en la primera expansión se reduce ahora al cálculo de 4 determinantes de orden tres, que en la siguiente expansión se deberán reducir a 3 determinantes de orden dos por cada determinante de orden tres, y luego a 2 determinantes de orden uno por cada determinante de orden dos, hasta así obtener el determinante buscado de orden cuatro. Se muestra a continuación la reducción del primer determinante de orden tres a 3 determinantes de orden dos (F2):

$$16\begin{vmatrix} 10 & 11 & 8 \\ 6 & 7 & 12 \\ 15 & 14 & 1 \end{vmatrix} = 16\left[10\begin{vmatrix} 7 & 12 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} - 11\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 15 & 1 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 15 & 14 \end{vmatrix}\right] \quad \text{(F2)}$$

Todos los cálculos engorrosos que se deberían hacer, para saber el valor del determinante del cuadro mágico, darán como resultado cero, y los estudiantes pueden verificar, que si aplican el método propuesto (la expansión de Laplace) a cualquier otro renglón o columna, el resultado será el mismo, de ahí que, dada una matriz cuadrada, el determinante de la misma es un invariante de ésta.

Justamente la idea anterior es parte de lo que permea en la enseñanza del álgebra lineal, es decir, se promueve que los estudiantes aprendan y memoricen un algoritmo por medio de las repeticiones, sin embargo, como ya se expuso anteriormente, se debería fomentar además de lo anterior, la identificación de patrones, el planteamiento de conjeturas y su posible justificación (Oktaç y Trigueros, 2010; Noguera, et al., 2015; Cáseres, 2016). Es evidente empero, que ante la laboriosa tarea que conlleva el cálculo de un determinante de orden 4, difícilmente se puede propiciar a que el estudiante, después de realizar varios de estos procedimientos, fuera capaz de plantear conjeturas, pues el esfuerzo y el tiempo que se emplean en el proceso algorítmico agota el tiempo de clase y posiblemente la voluntad de los estudiantes.

¿Qué se puede ganar con la introducción de un sistema de geometría dinámico como GeoGebra?

GeoGebra, incorpora potentes herramientas de cálculo algebraico, cálculo simbólico, graficación en dos y tres dimensiones, así como hoja de cálculo, en este sentido, se puede emplear la hoja de cálculo de GeoGebra para declarar un arreglo rectangular, en este caso, las entradas del cuadro mágico, y con las herramientas que tiene incorporadas, se genera casi en forma automática una matriz, después basta con solicitar que el software calcule del determinante de la misma por medio del algoritmo que ya tiene incorporado, y se tendrá de inmediato el resultado que a lápiz y papel es tedioso y laborioso.

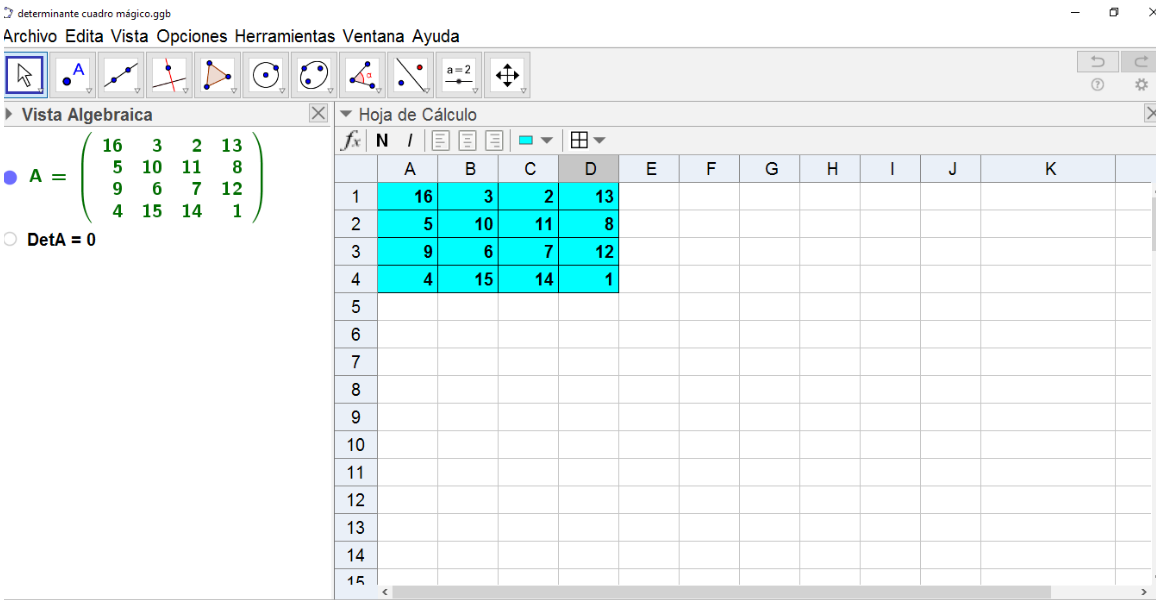

Figura 2. Uso de GeoGebra para la obtención del determinante.

Una vez que se permite la utilización de este recurso digital (Figura 2) durante la clase, la atención se puede centrar en la búsqueda de patrones y la formulación de conjeturas, por ejemplo, dado este primer caso, una pregunta que daría pie a posibles conjeturas es: ¿los cuadros mágicos son matrices con determinante nulo? Hay que recordar que el interés de identificar matrices cuyo determinante sea nulo, pudieran asociarse a un sistema de ecuaciones sin solución o a un conjunto de vectores linealmente dependientes.

Para explorar la pregunta, se puede intentar con un cuadro mágico de orden tres, por ejemplo, el conocido cuadro de la antigua cultura China, representado por una tortuga:

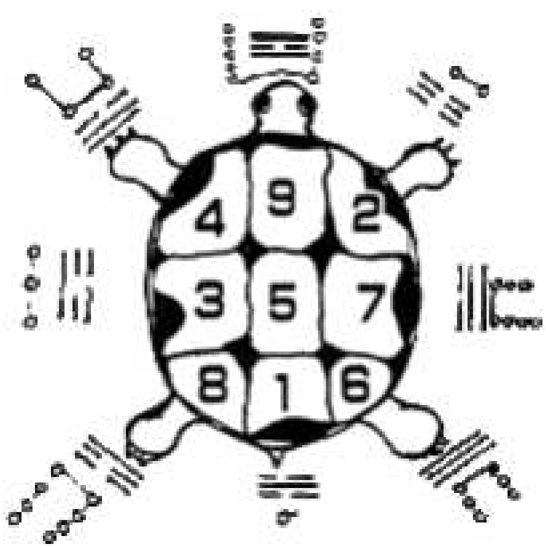

Figura 3. Antiguo cuadro mágico chino representado por una tortuga.

En la Figura 3, se tiene un cuadro mágico cuya constante mágica es 15, lo cual se puede constatar al sumar los tres números de cada renglón, columna, y diagonal.

Si bien resulta más amigable obtener a lápiz y papel el determinante de una matriz de orden tres, el interés ahora se centra en identificar algún patrón relacionado a los cuadros mágicos, por lo que la sugerencia es utilizar GeoGebra para la obtención del determinante.

Tabla 2. Cuadro mágico de orden 3.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Del cuadro mágico de la Tabla 2, se puede utilizar el mismo método de expansión de Laplace o incluso otro método conocido como regla de Sarrus, el cual consiste en adicionar las primeras dos columnas a la derecha del arreglo original, para luego hacer productos en diagonal en ambos sentidos, y restar la suma de los productos en un sentido y en otro.

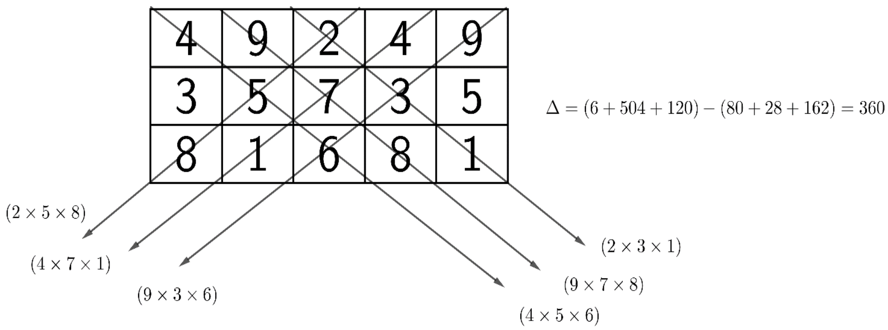

Figura 4. Regla de Sarrus aplicada al cuadro mágico de orden tres.

Hay que recordar que sea cual sea el método empleado para el cálculo del determinante de una matriz, y sin importar el orden de la misma, siempre que sea un método válido que se ajuste a la definición formal de determinante, debe dar un resultado invariante (Figura 4). En esta propuesta, insistimos en que, además de enseñar los métodos tradicionales para el cálculo de determinantes y de practicarlos, el interés se debiera centrar en aspectos propios del pensamiento matemático (identificar patrones, plantear estrategias de resolución de problemas, experimentar ideas, plantear conjeturas, tratar de dar justificaciones formales, extender y formular nuevos problemas), por lo que usar la hoja de cálculo de GeoGebra es otra vez una opción válida, para de forma casi inmediata saber el determinante del cuadro mágico de orden tres.

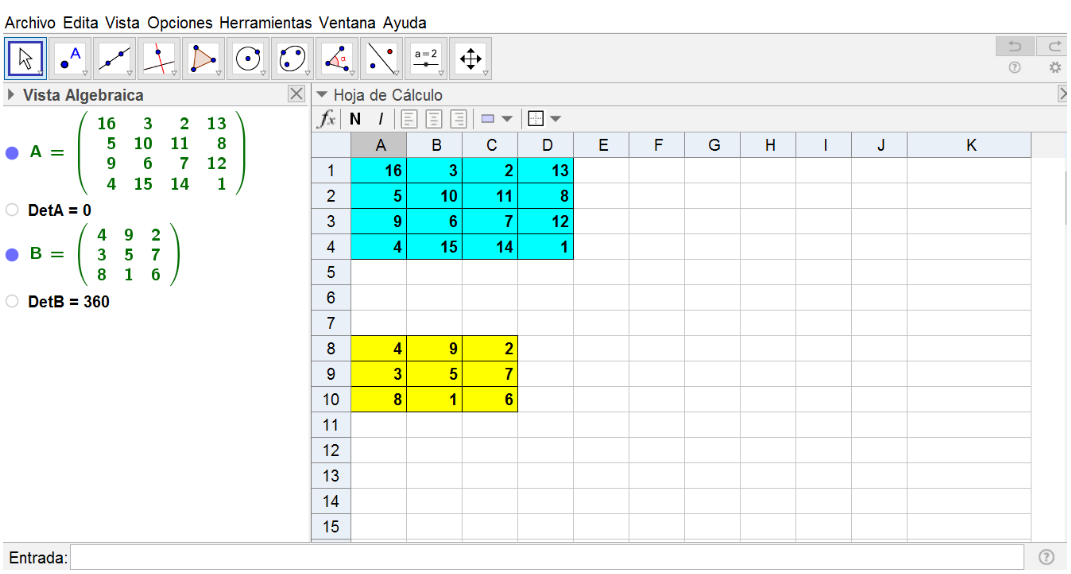

Figura 5. Determinante cuadro mágico de orden tres con GeoGebra.

Dado que hemos encontrado un cuadro mágico de orden tres cuyo determinante (Figura 5) no es nulo, la conjetura que se podría haber planteado a partir de obtener con GeoGebra el determinante del cuadro mágico de orden cuatro y descubrir que es nulo, se descarta, sin embargo, el ejercicio permite familiarizarse con el uso de GeoGebra para la obtención de determinantes de matrices cuadradas del orden deseado.

Una propuesta de actividad para identificar patrones y plantear conjeturas

Para proceder a la identificación de patrones sobre matrices con determinantes nulos, a partir del uso de GeoGebra como recurso digital, se propone iniciar de la siguiente manera: se proporciona a los estudiantes una plantilla de GeoGebra prellenada por el profesor, por ejemplo, en la vista de hoja de cálculo se declaran tres arreglos matriciales, uno de orden cinco, otro de orden cuatro y otro más de orden tres, en el cual se han prellenado algunas de las casillas con números enteros (positivos y negativos).

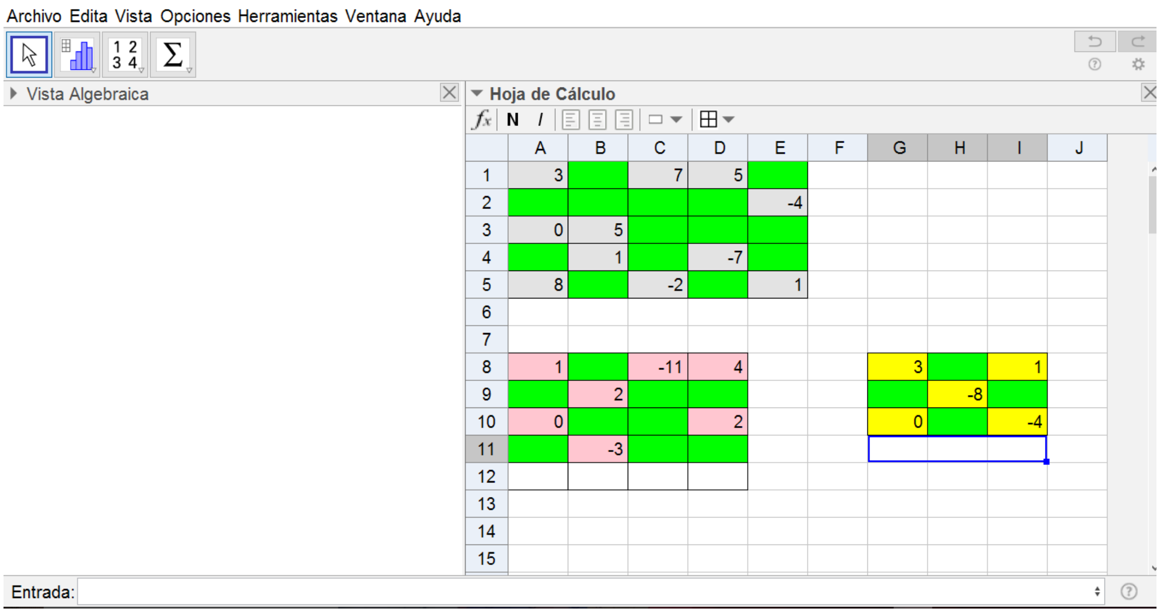

Figura 6. Plantilla prellenada para arreglos matriciales cuadrados.

Hemos marcado en verde las casillas en las que faltan entradas, para que sea más fácil identificar cuáles son las que se deben llenar. Se propone que le profesor sugiera a los estudiantes que de forma individual o de ser posible en grupos reducidos, se termine de llenar cada casilla de cada arreglo, con una condición, que la suma de cada uno de los elementos de cada columna sea cero, por ejemplo, en el arreglo de orden cinco de la Figura 6, ya se han colocado tres de los cinco elementos de la primera columna, (3,0,8), por lo que los estudiantes debieran colocar dos más, pero de tal forma, que la suma de éstos tres, junto con los restantes sea cero. Es fácil notar que sea lo que sea que coloquen, las entradas faltantes deben sumar menos once.

Es importante mencionar que el profesor debe dar libertad a los estudiantes para que llenen el resto de las entradas, incluso pueden emplear las herramientas de la hoja de cálculo de GeoGebra para verificar que efectivamente, la suma de cada columna en cada arreglo es cero; posteriormente se solicita a los estudiantes que generen las matrices respectivas y que obtengan directamente el determinante de cada una.

Se muestra a continuación una posibilidad, se ha utilizado la herramienta de suma de la misma hoja de cálculo para verificar que la suma de cada columna en cada arreglo matricial es cero, con base en los arreglos de la hoja de cálculo se definieron las matrices A, B y C orden cinco, cuatro y tres respectivamente, luego de ello, con el comando que permite hallar el determinante de una matriz cuadrada, se obtuvo cada uno y resultaron en cada caso, ser determinantes nulos.

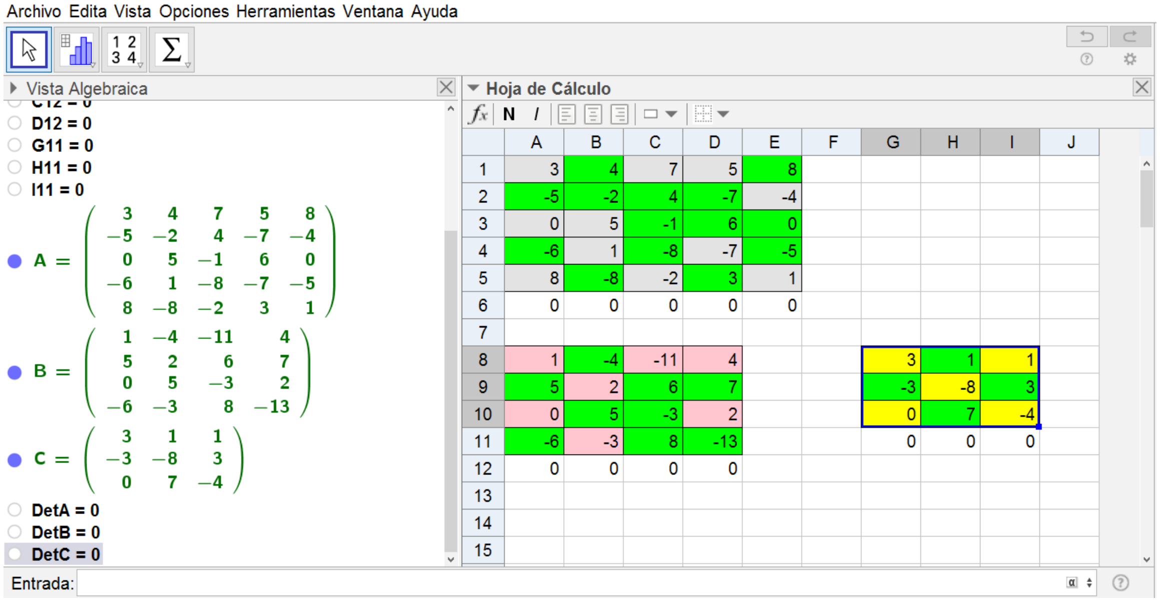

Figura 7. Ruta al planteamiento de una conjetura.

Con base en la identificación de este patrón, a partir de lo que se observa en la Figura 7, parece ser factible proponer una conjetura sobre un tipo de matrices cuadradas en las cuales se pudiera garantizar que su determinante vale cero, la conjetura pudiera enunciarse así: ***si en un arreglo rectangular cuadrado, la suma de las entradas de cada columna es igual a cero, el determinante de la matriz es nulo.***

¿Es plausible esta conjetura? El profesor puede contrastar con cada grupo de estudiantes, que aunque se propongan diferentes entradas faltantes (valores de las celdas verdes en la Figura 7), se puede hacer un consenso sobre lo que cada uno obtuvo, con lo cual no sólo tendríamos una propuesta para cada orden de las matrices empleadas, se puede incluso dar libertad a los estudiantes para que ahora ellos planteen arreglos en los que no existan entradas prellenadas por el profesor, pueden abordar con facilidad casos de matrices de orden superior, como seis, siete o más, si no son capaces de encontrar un caso que refute la conjetura propuesta, es plausible y se puede proceder a dar argumentos para su justificación.

Además, gracias al uso de un recurso digital como el sistema de geometría dinámica GeoGebra, se pueden abordar otras posibles conjeturas para verificar si son plausibles o no, por ejemplo: si en lugar de las columnas, nos fijamos en los renglones de una matriz cuadrada ¿si la suma de los elementos de cada renglón es cero, el determinante es nulo? O por ejemplo, ya que al sumar cero cada columna de una matriz cuadrada se obtuvo un determinante nulo ¿será que si las columnas de una matriz cuadrada suman una constante , el determinante será ?

Una posible ruta para tratar de justificar aquellas conjeturas que resulten plausibles, pudiera ser a partir de una lista de propiedades de los determinantes, que seguramente los estudiantes ya conocen a estas alturas, pero que probablemente no han tratado de utilizar para justificar una nueva propiedad, o también si se conoce alguna definición formal de determinante como una función de las filas o columnas de una matriz cuadrada, tal como la siguiente:

Definición. Un determinante es una función D que asigna un número real a cada n-ada de vectores (F3) $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ (F3) *y satisface las siguientes propiedades* (F4, 5 y 6):

1. $D(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}_i + \vec{u}_j, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_n) = D(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}_i, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_n)$ para todo $i = 1, \dots, n$ y para todo $j \neq i$. (F4)
2. $D(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \overrightarrow{\lambda u_i}, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_n) = \lambda D(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \lambda\vec{u}_i, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_n)$ para todo $\lambda \epsilon \mathbb{R}$ y para todo $i = 1, \dots, n$. (F5)
3. $D(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = 1$, donde $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ (F6) son vectores canónicos.

Barrera Mora (2007, pp. 118-119).

La propuesta de actividad concluirá cuando los estudiantes trabajen en la justificación formal de tales conjeturas, como ya se mencionó, partiendo de las propiedades del determinante, de su definición formal, o incluso pueden por ellos mismos, plantear otras formas de justificar conjeturas, lo cual, como ya se dijo, es un elemento central del pensamiento matemático.

CONCLUSIONES

Resulta deseable que en la clase de matemáticas el profesor, además de abordar actividades dónde se busque el desarrollo de las habilidades y competencias específicas que están asociadas a contenidos determinados, considere también el diseño de actividades de aprendizaje para el aula que promuevan elementos centrales del pensamiento matemático.

En tal propósito, el empleo de un sistema de geometría dinámico, como GeoGebra, proporciona un conjunto de herramientas que facilitan dichos procesos del pensar matemáticamente, en este caso concreto la identificación de patrones y la formulación y justificación de conjeturas para un tópico específico dentro de un curso típico de álgebra lineal, que en este caso es sobre las matrices y sus determinantes.

Otro aspecto que queremos resaltar, es que durante el proceso de diseño de actividades de aprendizaje para la clase de matemáticas, el docente puede recurrir a la combinación de elementos de fuentes diversas: para el caso de esta propuesta, por un lado consideramos la investigación de elementos históricos y epistemológicos alrededor de los distintos objetos matemáticos (como los datos históricos acerca del significado y características de los determinantes, así como el empleo de los cuadros mágicos), y en segunda instancia, considerando las potencialidades que puede brindar una herramienta tecnológica (el sistema de geometría dinámico GeoGebra).

Por último, los autores de esta contribución, pensamos que un elemento central para el diseño de este tipo de propuestas didácticas, tiene estrecha relación con el reconocimiento de la importancia que tiene el promover el desarrollo de los distintos elementos del pensamiento matemático.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E. y Soler, M. (2014). Actividades matemáticas: conjeturar y argumentar. ***Números***, 85, 75-90.

Barrera Mora, F. (2007). Álgebra lineal. Editorial Patria.

Campos-Nava, M., & Torres-Rodríguez, A. (2017). ***Las tareas de aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas a distancia***. Revista Mexicana de bachillerato a distancia, 9(17), 147-155.

Campos-Nava, M., & Torres-Rodríguez, A. (2019). ***Propiciando la argumentación en la clase de matemáticas: el caso de la geometría euclidiana***. (Ponencia). Memorias del onceavo congreso Internacional Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas. México.

Cáseres, E. (2016). Algunas consideraciones sobre el aprendizaje del álgebra lineal en ambientes de semipresencialidad: Una visión desde los estudiantes de Ingeniería de Producción de la UCLA. ***Dissertare. Revista de Investigación en Ciencias Sociales,*** 1(1).

Devlin, K. (1994). ***Mathematics, the science of patterns: the search for order in life, mind, and the universe.*** Scientific American Library.

Luzardo, D., & Peña, A. (2006). ***Historia del Álgebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX***. Divulgaciones Matemáticas, 14(2), 153-170.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2013). Cómo razonar matemáticamente. Editorial Trillas.

Medel, J., & García, C. (2016). ***Historia del determinante***. Revista Ciencia, 67(1), 60-67.

Mosquera, J. (2019). Historia de la enseñanza del álgebra lineal en la educación secundaria venezolana de 1918 a 1985. ***Areté. Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela***, 5 (9), 29 – 53.

Noguera, E., Huérfano, Y., & Vera, M. (2015). Entorno Virtual para la Enseñanza del Algebra Lineal en la Universidad Nacional Experimental de los Llanos Ezequiel Zamora, Núcleo Santa Barbara Estado Barinas. ***Dialéctica, Revista de Investigación en educación***. 11(1).

Oktaç, A, & Trigueros, M. (210). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? ***Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa***, 13(4).

Olivieri, G. (1997). Mathematics. A Science of Patterns? ***Synthese***, 112, 379-402.

Rosales, A. (2009). ***Evolución Histórica del Concepto de Matriz***. Revista digital Matemática, Educación e internet, 9(2).

Sáenz, C. (2001). ***Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas***. En, M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas, J. D. Godino, Juan D. (Eds.), Investigación en educación matemática: Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. (pp. 45-62). Servicio de Publicaciones.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense Making in Mathematics. En, D. Grows (Ed) *Handbook for Research of Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 334-368). NCTM.

Steen, L. (1988). *The Science of Patterns*. Science, 240, 611-616.

Steen, L. (1998). *Reflections on Mathematical Patterns, Relationships and Functions.* Prepared for the Minnesota K-12 Mathematics Framework, SciMath-MN. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.231.9177&rep=rep1&type=pdf